Programme de colle n°26

semaine du 13 au 17 mai

Notions vues en cours

Chapitre 29 : Matrices et applications linéaires *(en complément de la semaine précédente)*

- Détermination du noyau et de l'image d'un morphisme par la résolution de systèmes matriciels
- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notation $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$, le coefficient d'indice (i,j) de $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est la i-ième coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$
- $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$, formules de changement de base pour un vecteur, pour un morphisme ; cas particulier d'un endomorphisme
- Matrices équivalentes : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
- Matrices de dilation / permutation / transvection, notations $D_i(\mu)$ / $P_{i,j}$ / $T_{i,j}(\lambda)$, inverses de ces matrices
- Lien entre les matrices précédentes et les opérations élémentaires sur les lignes / les colonnes, les opérations élémentaires préservent le rang
- Matrice J_r : définition, son rang est r ; Toute matrice A est équivalente à une (et une seule) matrice J_r avec $r = \mathrm{rg} A$, tout morphisme admet une matrice de la forme J_r pour matrice dans des bases bien choisies
- Deux matrices (de même taille) sont équivalentes ssi elles ont le même rang
- Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots sous forme échelonnée, ou encore à la dimension du s.e.v. engendré par ses colonnes (ou encore par ses lignes), $\mathrm{rg}\, A^\top = \mathrm{rg}\, A$
- Matrices semblables : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices semblables sont équivalentes
- Trace d'une matrice : définition, notation $\mathrm{Tr}\, A$, c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, lorsque cela a un sens : $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, deux matrices semblables ont même trace
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, la quantité $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie ; trace d'un endomorphisme, la trace d'un projecteur est égale à son rang

Chapitre 30 : Groupe symétrique

- Permutation d'un ensemble E, ensemble $S(E)$, c'est un groupe pour la loi $\circ$
- Groupe symétrique $S_n = S(\llbracket 1, n \rrbracket)$, non abélien si $n \geq 3$, S_n possède $n!$ éléments
- Notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, notation multiplicative $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$, σ^{-1} est l'inverse de σ
- p-cycle, notation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, support d'un cycle, deux cycles à supports disjoints commutent, transposition, point fixe
- Toute permutation différente de id peut se décomposer en un produit de cycles à supports disjoints, de manière unique à l'ordre près, orbite d'une permutation, méthode pratique de la décomposition
- Décomposition d'un cycle (et par suite d'une permutation) en produit de transpositions, cette écriture n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions est unique, permutation paire / impaire
- Signature d'une permutation, notation $\varepsilon(\sigma)$, c'est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$, lien avec la parité d'une permutation, la signature d'une transposition vaut -1, celle d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **27 à 29**. *Des exemples de questions figurent ci-après.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition d'une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. Sans démonstration : inversibilité de la matrice de passage, formule de changement de base pour un morphisme et pour un endomorphisme Chapitre 29, Définition 29.14, Propriétés 29.15, 29.16 et 29.17
2. Trace d'une matrice : définition, que peut-on dire de la trace d'une combinaison linéaire de matrices (sans démonstration) ? D'un produit de deux matrices (avec démonstration) ? Chapitre 29, Définition 29.36 et Propriétés 29.37 et 29.38
3. Énoncé uniquement : propriété de décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints ; puis, calcul de cette décomposition pour une permutation donnée par l'examinateur ; puis, décomposition de cette permutation en produit de transpositions ; enfin, on donnera la signature de cette permutation Chapitre 30, Théorème 30.11 puis encadré méthode page 6, etc.

Exemples de questions libres :

Chapitre 27 :

- Donner la définition d'une application linéaire.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition ensembliste de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs et d'une application linéaire.
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 28 :

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(x)$ pour $x \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p.
- Compléter ces phrases : "soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ..." et "soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ..."
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Que signifie l'assertion "f est une forme linéaire sur E" ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Donner une caractérisation de l'assertion "H est un hyperplan" qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 29 :

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F, G, compléter la formule suivante :
$$\operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v) \times \operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(u)$$
- Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Entre les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$, laquelle est la plus facile à calculer ? Donner cette matrice sans justification.
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?